

© 2024 г. Л.Б. РАПОПОРТ, д-р физ.-мат. наук (lbrapoport@gmail.com)
(Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл.),
А.А. ГЕНЕРАЛОВ, канд. техн. наук (generalov.alexey@gmail.com)
(Topcon Technology Finland, Эспоо),
Б.А. БАРУЛИН (barulin.ba@phystech.edu),
М.Д. ГОРБАЧЕВ (gorbachev.md@phystech.edu)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РАСШИРЕНИЕ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА КОЛЕСЕ

Продолжается исследование синтеза стабилизирующих законов управления для механической системы, состоящей из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Цель управления состоит в одновременной стабилизации вертикального положения маятника и заданного положения колеса. Трудность этой задачи состоит в том, что одно управление используется для достижения двух целей – стабилизации угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Ранее предлагалось использовать метод линеаризации обратной связью по выходу. В качестве выхода берется сумма угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Для того, чтобы замкнутая система была не только асимптотически устойчивой по выходу, но и обладала асимптотически устойчивой нулевой динамикой, предлагалось к закону управления, стабилизирующему по выходу, добавлять диссипативное слагаемое.

В данной работе предложена двухпараметрическая модификация этого закона. Наряду с диссипативным слагаемым предлагается ввести положительный множитель. Более общая параметризация позволяет стабилизировать данную систему в случаях, когда использование ранее предложенного закона не давало результата.

Исследуются свойства нового закона управления и строится оценка области притяжения. Построение оценки сводится к задаче о разрешимости линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: асимптотическая стабилизация, перевернутый маятник, оценка области притяжения, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024040043, **EDN:** ZGNRPR

1. Введение

Механическая система, рассматриваемая в работе, состоит из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Колесо катится по плоской поверхности, пересечение которой с вертикальной плоскостью (рис. 1) образует ось ξ .

Эта система, также как и родственная ей система, состоящая из тележки с перевернутым маятником, исследуется во многих работах по теории управления, см., например, [1–11]. Список работ и анализ состояния исследований

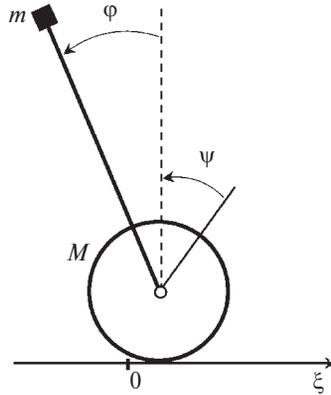


Рис. 1. Схема маятника на колесе.

в этой области можно найти в [1]. Отметим лишь, что эта система привлекает интерес как нелинейная, неустойчивая и неминимально фазовая система, на которой исследуются различные методы синтеза управления.

Во многих работах исследуется синтез управления, стабилизирующего вертикальное положение маятника в линеаризованной системе, см., например, [2, 3, 8]. Легко решается задача синтеза нелинейного контроллера с помощью метода линеаризации обратной связью [4] по выходу. В качестве выхода берется угол отклонения маятника. Однако это не решает полную задачу стабилизации по состоянию, поскольку нулевая динамика остается неустойчивой и положение центра колеса не стабилизируется. В [12] развивается подход к построению так называемых виртуальных выходов, стабилизация по которым гарантирует также и стабилизацию по состоянию. Применение этого подхода в общем виде сложно.

Краткий анализ подходов к решению задачи в нелинейной постановке дан в [1]. В [9] используется теория малых коэффициентов усиления. Работа [10] дает решение, основанное на синтезе оптимального по быстродействию управления. В [11] решается задача глобальной стабилизации и предлагается комбинированный закон управления, в котором при больших начальных отклонениях применяется управление маятником, гарантирующее попадание в область локальной стабилизируемости. Большое значение имеет построение оценки такой области. Очевидно, что оценка, зависящая от построенного закона управления и выбранной функции Ляпунова, может быть консервативной. Актуальна задача построения такой оценки максимального размера в классе, определенном параметрами функции Ляпунова.

Этой задаче посвящена настоящая работа, являющаяся продолжением [1], в которой показано, что если в качестве выхода взять сумму угла отклонения маятника и приведенного угла поворота колеса и синтезировать управление, стабилизирующее по этому выходу, то замкнутая система окажется устойчивой, хотя и не асимптотически. Стабилизация нулевого состояния получается добавлением к управлению слагаемого, пропорционального разнице угловых

скоростей колеса и маятника и имеющего смысл момента вязкого трения в оси колеса. Также в [1] получена оценка области притяжения состояния равновесия с помощью специально построенной функции Ляпунова, состоящей из квадратичной части и нелинейного слагаемого. Параметры функции Ляпунова находятся решением последовательности задач о совместности линейных матричных неравенств (ЛМН).

В данной работе предложена двухпараметрическая модификация закона управления, полученного методом линеаризации обратной связи по выходу. Наряду с диссипативным слагаемым, имеющим смысл момента силы вязкого трения в точке подвеса, предлагается ввести положительный множитель перед законом управления. Более общая параметризация позволяет стабилизировать данную систему в случаях, когда использование ранее предложенного закона не давало результата. В статье рассмотрен пример, иллюстрирующий это утверждение.

2. Модель системы

Используем математическую модель, описанную в [2] с обозначениями, введенными в [1]. Кроме того, используется введенная в последней работе замена переменной времени. Положительное значение углов отсчитывается против часовой стрелки. Итак, пусть

ξ – это положение центра колеса на горизонтальной оси рис. 1;

φ – угловое отклонение маятника от вертикальной оси;

l – длина маятника;

ψ – угол между вертикалью и некоторым выделенным радиусом колеса, причем нулевому значению ψ отвечает нулевое значение ξ ; $\psi = -\frac{\xi}{r}$;

m – масса, сосредоточенная на конце маятника;

M, J, r – масса, момент инерции и радиус колеса соответственно;

$\theta = \psi \frac{r}{l}$ – приведенный угол поворота колеса;

U – момент силы, развиваемый приводом и приложенный между маятником и колесом;

$u = \frac{U}{mgl}$, g – ускорение свободного падения;

t – время и $\tau = t\sqrt{g/l}$ – новая безразмерная независимая переменная;

' – производная по переменной τ .

Обозначим угловые скорости: $\omega = \varphi'$, $\delta = \theta'$ и $x = (\varphi, \omega, \theta, \delta)^T$. Использование Лагранжева формализма и независимой переменной τ дает уравнения движения в виде (см. [1])

$$\varphi' = \omega,$$

$$\omega' = f_1(x) + h_1(x)u,$$

$$\theta' = \delta,$$

$$\delta' = f_2(x) + h_2(x)u,$$

где

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_1(x) &= \frac{\sin \varphi}{d}[-\omega^2 \cos \varphi + (1 + \beta)], \\
 f_2(x) &= \frac{\sin \varphi}{d}(\omega^2 - \cos \varphi), \\
 h_1(x) &= \frac{1}{d}(\cos \varphi + 1 + \beta), \\
 h_2(x) &= \frac{1}{d}(-\cos \varphi - 1), \\
 \beta &= \frac{M + J/r^2}{m}, \\
 d &= \beta + \sin^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

Обозначив $f = (\omega, f_1, \delta, f_2)^\top$ (символ зависимости от x для простоты опущен) и $h = (0, h_1, 0, h_2)^\top$, перепишем систему (2) в виде

$$(2) \quad x' = f + hu.$$

3. Синтез управления, стабилизирующего нулевое состояние равновесия системы (2)

Выберем в качестве выхода системы

$$(3) \quad y = \varphi + \theta$$

и синтезируем управление системой (2), гарантирующее асимптотическую устойчивость по этому выходу. Метод синтеза управления, стабилизирующего систему по выходу, описан, например, в [4, глава 12]. Получим выражение для закона управления:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad u^*(x) &= -\frac{\lambda^2 y + 2\lambda y' + F}{H} = \\
 &= -\frac{d\lambda^2(\varphi + \theta) + 2d\lambda(\omega + \delta) + \sin \varphi [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta]}{\beta}.
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad F = \frac{\sin \varphi}{d} [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta], \quad H = \frac{\beta}{d}.$$

В (4) параметр λ имеет смысл желаемого коэффициента экспоненциального затухания выхода замкнутой системы. Выход замкнутой системы будет удовлетворять линейному дифференциальному уравнению второго порядка с корнем характеристического полинома $-\lambda$ кратности 2.

Система (2), замкнутая управлением (4), принимает вид

$$(6) \quad x' = f(x) + h(x)u^*(x),$$

причем

$$f(0) = 0, \quad u^*(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Система (6), линеаризованная в окрестности нуля, имеет вид

$$(7) \quad x' = \Phi x, \quad \Phi = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} + h(0) \left. \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \right|_{x=0}^T.$$

Имеем

$$(8) \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\beta+2)\lambda^2+1}{\beta} & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda^2+1}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} & 2\frac{\lambda^2}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Сделаем линейную замену переменных $\zeta = Sx$, где

$$(9) \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другими словами,

$$\zeta_1 = \varphi, \quad \zeta_2 = \omega, \quad \zeta_3 = y, \quad \zeta_4 = y'.$$

В новых переменных матрица (8) принимает вид

$$(10) \quad \Phi_\zeta = S\Phi S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & 0 & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристические полиномы матриц Φ и Φ_ζ совпадают. Непосредственно из блочно-треугольного вида матрицы (10) следует, что ее спектр составлен из спектров двух диагональных блоков размера 2×2 . Таким образом, собственные числа матрицы (10) равны

$$(11) \quad \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\beta}}, \frac{i}{\sqrt{\beta}}, -\lambda, -\lambda \right\},$$

где i – это мнимая единица. Матрица Φ_ζ (так же как и Φ) имеет пару чисто мнимых корней и кратный отрицательный корень. Такое распределение корней отражает тот факт, что замкнутая система асимптотически устойчива по выходу и имеет нулевую динамику, не являющуюся асимптотически устойчивой.

Перейдем к синтезу закона управления, обеспечивающего асимптотическую стабилизацию системы (2). Ранее, в [1] было предложено добавить к управлению (4) диссипативное слагаемое, имеющее смысл вязкого трения в точке соединения маятника и колеса, а именно

$$(12) \quad u^{**}(x) = u^*(x) - k(\omega - \delta), \quad k > 0.$$

В настоящей работе рассматривается более общее параметрическое расширение закона управления (4). Кроме коэффициента k , на знак которого ограничений накладывать не будем, вводится множитель s . Выражение для нового закона управления имеет вид

$$(13) \quad u^{***}(x) = su^*(x) - k(\omega - \delta).$$

В новых переменных матрица системы (2), замкнутой управлением (13) и линеаризованной в окрестности нуля, имеет вид

$$(14) \quad \Phi_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\beta+1)(1-s)}{\beta} - \frac{s}{\beta} & -2k\frac{\beta+2}{\beta} & -\frac{(\beta+2)\lambda^2}{\beta}s & (k-2\lambda s)\frac{(\beta+2)}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-s & -2k & -\lambda^2s & k-2\lambda s \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы равен

$$(15) \quad N(\mu, s) = \det(\mu I - \Phi_s) = \\ = \mu^4 + \left(2\lambda s + k\frac{4+\beta}{\beta}\right)\mu^3 + \left(\lambda^2 s + \frac{\beta+2}{\beta}(s-1) + \frac{1}{\beta}\right)\mu^2 + \frac{2\lambda s - k}{\beta}\mu + \frac{\lambda^2}{\beta}s.$$

Выясним, при каких значениях параметров s и k полином (15) имеет корни с отрицательными вещественными частями. Воспользуемся критерием Лъенара–Шипара (см., например, [14, параграф 3.5]). Для этого составим матрицу Гурвица

$$(16) \quad \begin{pmatrix} 2\lambda s + k\frac{4+\beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} & 0 & 0 \\ 1 & \lambda^2 s + \frac{\beta+2}{\beta}(s-1) + \frac{1}{\beta} & \frac{\lambda^2}{\beta}s & 0 \\ 0 & 2\lambda s + k\frac{4+\beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^2 s + \frac{\beta+2}{\beta}(s-1) + \frac{1}{\beta} & \frac{\lambda^2}{\beta}s \end{pmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием гурвицевости полинома (15) является положительность его коэффициентов и положительность третьего главного минора матрицы (16). Условия положительности коэффициентов полинома с учетом положительности λ и β принимают вид

$$(17) \quad -2\lambda s \frac{\beta}{\beta + 4} < k < 2\lambda s$$

и

$$(18) \quad s > \frac{\beta + 1}{\lambda^2 \beta + \beta + 2} \doteq \bar{s}.$$

Условие положительности третьего минора матрицы (16) принимает вид

$$(19) \quad \det \begin{pmatrix} 2\lambda s + k \frac{4 + \beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} & 0 \\ 1 & \lambda^2 s + \frac{\beta + 2}{\beta}(s - 1) + \frac{1}{\beta} & \frac{\lambda^2}{\beta} s \\ 0 & 2\lambda s + k \frac{4 + \beta}{\beta} & \frac{2\lambda s - k}{\beta} \end{pmatrix} > 0$$

и, после необходимых преобразований (здесь и далее использовался пакет компьютерной алгебры [13]),

$$\frac{\beta + 2}{\beta^3} \left\{ k^2 [\beta + 2 - (\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)s] - \right. \\ \left. - 4\lambda s k + 4\lambda s^2 [\lambda\beta(s - 1) + k(2 - \lambda^2\beta)] \right\} > 0.$$

Сократив на положительный множитель $(\beta + 2)/\beta^3$, представим его в окончательном виде

$$(20) \quad k^2 [\beta + 2 - (\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)s] + 4k\lambda s [s(2 - \lambda^2\beta) - 1] + 4\lambda^2 s^2 \beta (s - 1) > 0.$$

Покажем, что даже без диссипативного слагаемого в законе управления (13) (т.е. при $k = 0$) можно достичь асимптотической устойчивости замкнутой линейризованной системы. Имеет место следующая

Лемма 1. При $k = 0$ условия гурвицевости полинома (15) выполняются при любом

$$(21) \quad s > 1.$$

Доказательство леммы дано в Приложении. Таким образом, асимптотическая устойчивость по выходу y превращается в асимптотическую устойчивость по состоянию с помощью коэффициента усиления, большего единицы, при управлении (4).

Слагаемые в (20) сгруппированы в виде полинома второй степени относительно k . Обозначим коэффициенты этого полинома через

$$(22) \quad \begin{aligned} c_0 &= \beta + 2 - (\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)s, & c_1 &= 4\lambda s [s(2 - \lambda^2\beta) - 1], \\ c_2 &= 4\lambda^2 s^2 \beta (s - 1). \end{aligned}$$

Символ зависимости коэффициентов от s для краткости опущен. Через s_0 обозначим значение, при котором c_0 обращается в ноль:

$$(23) \quad s_0 = \frac{\beta + 2}{(\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)},$$

причем

$$(24) \quad c_0 < 0 \quad \text{при} \quad s > s_0.$$

Имеет место следующая

Лемма 2. При любых значениях λ и $\beta > 0$ справедливо неравенство

$$(25) \quad s_0 < \bar{s} < 1,$$

или, другими словами, из выполнения условия (18) следует выполнение неравенства $c_0 < 0$.

Доказательство вынесено в Приложение.

Исследуем область асимптотической устойчивости системы (14) в пространстве параметров s, k . Обозначим эту область через Ω . Заметим, что граничная точка $1, 0$ области Ω не принадлежит. Лемма 1 утверждает, что отрезок $s > 1, k = 0$ принадлежит Ω . Насколько можно расширить эту область, выбирая $k \neq 0$ при различных значениях s , удовлетворяющих условию (18)? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. Точка s, k принадлежит области Ω тогда и только тогда, когда совместно с (24) выполняются условия (17), (18),

$$(26) \quad c_1^2 - 4c_0c_2 > 0$$

и

$$(27) \quad \frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_0} < k < \frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_0}.$$

Для $s = 1$ точка $1, k$ принадлежит области Ω тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(28) \quad 0 < k < \frac{2\lambda(1 - \lambda^2\beta)}{1 + \lambda^2(\beta + 4)}.$$

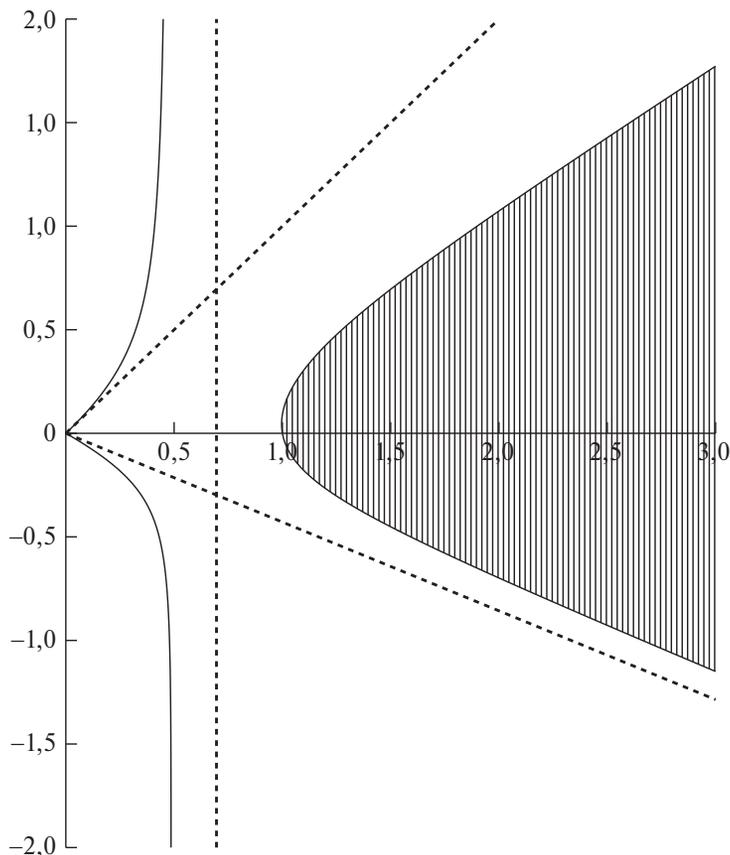


Рис. 2. Область Ω , отвечающая значениям $\beta = 3$ и $\lambda = 0,5$.

Доказательство вынесено в Приложение.

Неравенство (28) совпадает с ранее полученной в [1] оценкой коэффициента k , обеспечивающей асимптотическую устойчивость линеаризованной системы, замкнутой законом управления (12).

На рис. 2 показан пример области Ω . На рисунке наклонными пунктирными линиями изображена граница области (17), а вертикальная пунктирная линия изображает границу области (18). Сплошная тонкая линия изображает границу области определения неравенства (20). Как следует из рисунка, эта область имеет три компонента с криволинейными границами. Лишь одна из них, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и заштрихованная вертикальными линиями, является областью Ω .

На рис. 3 для сравнения показан в укрупненном масштабе фрагмент области Ω и область устойчивости, определяемой неравенством (28) при $s = 1$ и тех же значениях параметров β и λ . Из рисунка видно, что введение параметра s в закон управления (13) позволяет существенно расширить область устойчивости. Кроме того, можно получить асимптотическую устойчивость

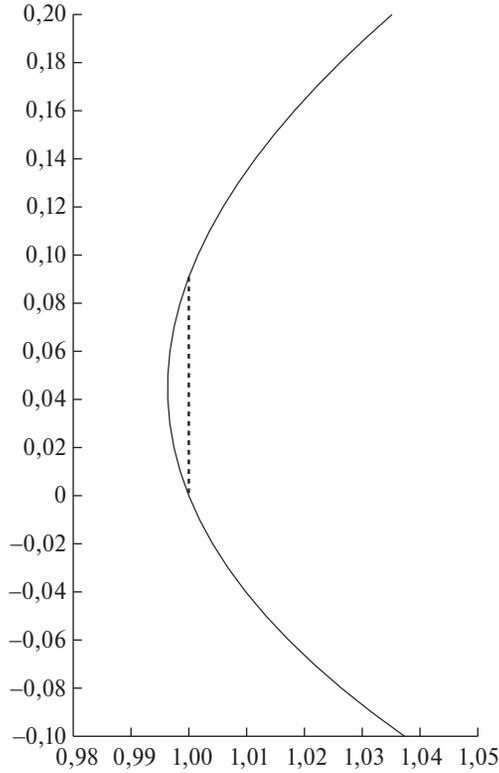


Рис. 3. Сравнение области Ω и ее части, изображенной пунктирным отрезком. Часть отвечает значению $s = 1$ и определяется неравенством (28).

при тех значениях параметров β и λ , при которых стабилизация законом управления (12) невозможна.

Рассмотрим теперь поведение системы (2), замкнутой управлением (13), не в окрестности нуля, а во всем пространстве. После перехода к переменным φ , ω , y , y' замкнутая система имеет вид

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & \varphi' = \omega, \\
 & \omega' = -s \frac{\beta + \cos \varphi + 1}{\beta} (\lambda^2 y + 2\lambda z) - s \frac{1 + \omega^2}{\beta} \sin \varphi - \\
 & \quad - k \frac{\beta + \cos \varphi + 1}{\sin^2 \varphi + \beta} (2\omega - z) - (s - 1) \frac{(\beta + 1 - \omega^2 \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi + \beta} \sin \varphi, \\
 & y' = z, \\
 & z' = -s (\lambda^2 y + 2\lambda z) - k \frac{\beta}{\sin^2 \varphi + \beta} (2\omega - z) - \\
 & \quad - (s - 1) \frac{(\omega^2 + 1)(1 - \cos \varphi) + \beta}{\sin^2 \varphi + \beta} \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Система (29) может быть переписана в виде

$$\zeta' = \Psi(\gamma)\zeta,$$

$$(30) \quad \Psi(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma_4 - 1)}{\beta}s - \gamma_5(s - 1) & -2\gamma_3k & -\gamma_2\lambda^2s & \gamma_3k - 2\gamma_2\lambda s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_6(s - 1) & -2\gamma_1k & -\lambda^2s & \gamma_1k - 2\lambda s \end{bmatrix},$$

где с учетом $d = \beta + \sin^2 \varphi$:

$$(31) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\beta}{d}, \\ \gamma_2 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta}, \\ \gamma_3 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{d}, \\ \gamma_4 &= 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}(1 + \omega^2), \\ \gamma_5 &= \frac{1 + \beta - \omega^2 \cos \varphi}{d} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right), \\ \gamma_6 &= \frac{(1 + \omega^2)(1 - \cos \varphi) + \beta}{d} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Относительно области изменения угла φ сделаем

Предположение 1. Предположим, что на траекториях управляемой системы (2) выполняются условия

$$(32) \quad |\varphi| \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \quad |\omega| \leq \omega_0,$$

где φ_0, ω_0 – некоторые положительные константы.

Система (30), эквивалентная (29), нелинейна. Наряду с ней рассмотрим линейную нестационарную систему

$$(33) \quad \zeta' = \Psi(\gamma(\tau))\zeta,$$

где числа $\gamma_l(\tau)$, $l = 1, \dots, 6$, представляют собой произвольно меняющиеся во времени τ измеримые функции, стесненные только двусторонними ограниче-

ниями, следующими из выражений (31) и предположения 1:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(\tau) &\in \left[\frac{\beta}{d_0}, 1 \right], \\
 \gamma_2(\tau) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{\beta}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\
 \gamma_3(\tau) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{d_0}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\
 \gamma_4(\tau) &\in [-\omega_0^2, 1 - r_0], \\
 \gamma_5(\tau) &\in \left[\min \left\{ \frac{1 + \beta - \omega_0^2}{\beta}, \frac{1 + \beta - \omega_0^2 \cos \varphi_0}{d_0} r_0 \right\}, \frac{\beta + 1}{\beta} \right], \\
 \gamma_6(\tau) &\in \left[\frac{1 - \cos \varphi_0 + \beta}{d_0} r_0, \max \left\{ 1, \frac{(1 - \cos \varphi_0)(1 + \omega_0^2) + \beta}{d_0} r_0 \right\} \right],
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

где

$$d_0 = \beta + \sin^2 \varphi_0 \quad \text{и} \quad r_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}.$$

Множество решений системы (33) при всевозможных значениях $\gamma_l(\tau)$ шире, чем множество решений нелинейной системы (29). Поэтому требование абсолютной устойчивости нулевого решения системы (33) в классе функций $\gamma_l(\tau)$, подчиненных ограничениям (34), обеспечит также и устойчивость нулевого решения системы (29). Метод погружения в более широкий в смысле множества решений класс систем дает достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (29). Для получения таких условий выберем функцию Ляпунова, имеющую отрицательную производную одновременно для всех систем (33), (34).

В качестве кандидата выберем функцию

$$(35) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^T P \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\omega^2 \beta}{2} \right],$$

параметризованную положительно определенной матрицей $P \succ 0$ (знаки \succ , \prec , \succeq и \preceq означают положительную и отрицательную определенность и полуопределенность соответственно) и неотрицательным числом $\alpha \geq 0$. Разложение нелинейного слагаемого с множителем α в ряд Тейлора в выражении (35) начинается с членов третьего порядка и служит поправкой к квадратичной форме для лучшего учета нелинейных свойств системы (33). Выражение $1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2)$ представляет собой первый интеграл предельной системы, введенной в [1]. Требование отрицательной определенности производной функции (35) в силу системы (33) при всевозможных значениях $\gamma_l(\tau)$, $l = 1, \dots, 6$, из интервалов (34) будет представлено в виде системы ЛМН.

Производная функции (35) в силу системы (33) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (36) \quad V' &= \zeta^T P \Psi(\gamma) \zeta + \alpha \left[\sin \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \zeta_2 + \right. \\
 &+ \frac{\beta \zeta_2}{1 + \zeta_2^2} \left(\gamma_5 (1 - s) \zeta_1 - (1 + \zeta_2^2) \frac{s}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4 \right) - \\
 &- \beta \zeta_2 \left(\gamma_5 (1 - s) \zeta_1 - (1 + \zeta_2^2) \frac{s}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4 \right) \left. \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4) \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4 + \right. \\
 &\quad \left. + (s - 1) \zeta_1 \zeta_2 \left(1 - \beta \gamma_5 \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) - \gamma_4 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} \right) \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 s \zeta_3 + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2 s) \zeta_4) \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4 + \right. \\
 &\quad \left. + (s - 1) \zeta_1 \zeta_2 \left(\zeta_2^2 \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} - \beta \gamma_5 \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \right) \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_9 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_8 s \zeta_3 + (k\gamma_9 - 2\lambda\gamma_8 s) \zeta_4) \beta - \gamma_4 \zeta_1 \zeta_2 + \gamma_7 (s - 1) \zeta_1 \zeta_2 \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= -\frac{\zeta_2^2}{1 + \zeta_2^2}, \\
 \gamma_7 &= \frac{\omega^2 \sin \varphi}{\varphi} \left(1 + \frac{\beta}{(1 + \omega^2)} \frac{(\beta + 1 - \omega^2 \cos \varphi)}{d} \right), \\
 \gamma_8 &= \gamma_0 \gamma_2, \\
 \gamma_9 &= \gamma_0 \gamma_3.
 \end{aligned}$$

Для определенных выше величин выполняются следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned}
 (37) \quad \gamma_0 &\in \left[-\frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2}, 0 \right], \\
 \gamma_7 &\in \left[0, \max \left\{ \omega_0^2 r_0 \left(1 + \frac{\beta (\beta + 1 - \omega_0^2 \cos \varphi_0)}{(1 + \omega_0^2)(\beta + \sin^2 \varphi_0)} \right), \frac{\omega_0^2 (2 + \beta)}{(1 + \omega_0^2)} \right\} \right], \\
 \gamma_8 &\in \left[-\frac{\omega_0^2 (2 + \beta)}{\beta (1 + \omega_0^2)}, 0 \right], \\
 \gamma_9 &\in \left[-\frac{\omega_0^2 (2 + \beta)}{\beta (1 + \omega_0^2)}, 0 \right].
 \end{aligned}$$

Учитывая, что в соответствии с выражениями (34) величины γ_2 и γ_3 принимают максимальные значения одновременно, получаем, что и величины γ_8 и γ_9 принимают минимальные значения $-\frac{\omega_0^2(2+\beta)}{\beta(1+\omega_0^2)}$ и максимальные значения 0 одновременно. Тогда в выражении (36) достаточно оставить одно значение γ_8 и записать

$$(38) \quad V' = \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\beta \gamma_8 \zeta_2 (-2k \zeta_2 - \lambda^2 s \zeta_3 + (k - 2\lambda s) \zeta_4) + (\gamma_7(s - 1) - \gamma_4) \zeta_1 \zeta_2].$$

В следующем разделе условие $V' < 0$ будет представлено в терминах ЛМН.

4. Оценка области притяжения нулевого положения равновесия

Выражение для функции Ляпунова (35) представим в виде

$$(39) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) \right] \geq \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta,$$

где через $Q(\alpha)$ обозначена матрица

$$(40) \quad Q(\alpha) = P - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потребовав выполнение неравенства

$$Q(\alpha) \succeq \varepsilon I,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, получаем из (39), что функция $V(\zeta)$ положительно определена. Далее, выражение (38) для V' аффинно зависит от произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 8$, каждый из которых принимает значения из отрезка. При этом вектор γ принимает значения из декартова произведения восьми отрезков. Это множество (обозначим его как $\Gamma \subset R^8$) выпукло и имеет 256 крайних точек, получающихся приравниванием произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 8$, своим минимальным и максимальным значениям в отрезках (34) и (37). Квадратичная форма (38), матрица которой аффинно зависит от параметров γ , отрицательно определена для всех $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда она отрицательно определена на крайних точках этого множества, т.е. на векторах γ_i . Поэтому условие $V' < 0$ эквивалентно системе из 256 ЛМН, каждое из которых соответствует одному из векторов γ^i , $i = 1, \dots, 256$. Для всевозможных γ^i получим систему ЛМН (одно ЛМН большей размерности)

$$(41) \quad P \Psi(\gamma^i) + \Psi^T(\gamma^i) P - \alpha Y(\gamma^i) \preceq 0,$$

где

$$Y(\gamma^i) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4^i - \gamma_7^i(s-1) & 0 & 0 \\ \gamma_4^i - \gamma_7^i(s-1) & 4\beta\gamma_8^i k & \beta\gamma_8^i \lambda^2 s & \beta\gamma_8^i (2\lambda s - k) \\ 0 & \beta\gamma_8^i \lambda^2 s & 0 & 0 \\ 0 & \beta\gamma_8^i (2\lambda s - k) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так построенная система ЛМН может оказаться несовместной при заданных значениях φ_0 и ω_0 . Введем в рассмотрение параметр $a \in [0, 1]$ и выберем в качестве φ_0 и ω_0 величины

$$\varphi_0(a) = a \frac{\pi}{2}, \quad \omega_0(a) = a\bar{\omega},$$

где $\bar{\omega} = \sqrt{e^{\frac{4}{\beta}} - 1}$. Каждому значению $\varphi_0(a), \omega_0(a)$ отвечают значения границ интервалов (34) и (37) и, следовательно, 256 векторов $\gamma^i(a)$. Из выражений для границ интервалов видно, что векторы $\gamma^i(a)$ непрерывно зависят от a . При $a = 0$ нижние и верхние границы интервалов совпадают. Поэтому при $a = 0$ имеем

$$\gamma^i(0) \doteq \gamma^0 = \left[1, \frac{2+\beta}{\beta}, \frac{2+\beta}{\beta}, 0, \frac{1+\beta}{\beta}, 1, 0, 0 \right]^T.$$

В силу выражений для матриц (14) и (30) имеем $\Psi(\gamma^0) = \Phi_s$. Тогда теорема 1 гарантирует совместность системы ЛМН (41) для достаточно малых значений $a > 0$.

Пусть a^* – это точная верхняя грань тех a , при которых система ЛМН относительно переменных P и α

$$(42) \quad \begin{aligned} P\Psi(\gamma^i(a)) + \Psi^T(\gamma^i(a))P - \alpha Y(\gamma^i(a)) &\leq 0, \\ Q(\alpha) &\succeq \varepsilon I, \\ \text{tr}(Q(\alpha)) &= 1 \end{aligned}$$

совместна. Последнее линейное уравнение, приравнивающее след $Q(\alpha)$ единице, добавлено для нормировки решения, поскольку в противном случае множество решений ЛМН образовывало бы конус и вместе с любым решением P и α было бы также решением σP и $\sigma \alpha$ при любых $\sigma > 0$, включая как угодно большие и как угодно малые значения.

Величина a^* получается последовательной проверкой совместности (42) для возрастающей последовательности значений a .

Итак, при выполнении предположения 1, где $\varphi_0 = a^* \frac{\pi}{2}$ и $\omega_0 = a^* \bar{\omega}$, функция Ляпунова (35) имеет отрицательно определенную производную в силу системы (30). Если найдется такая константа $c > 0$, что множество

$$(43) \quad \Omega_c = \{\zeta : V(\zeta) \leq c\}$$

окажется вписано внутрь множества

$$(44) \quad \Pi_0 = \{ \zeta : |\varphi| \leq \varphi_0, |\omega| \leq \omega_0 \},$$

то любая траектория замкнутой системы (30), начатая внутри множества Ω_c , остается внутри этого множества для любых моментов времени в силу отрицательности производной V' . В результате при выполнении

$$(45) \quad \Omega_c \subset \Pi_0$$

предположение 1 будет выполняться вдоль всей траектории замкнутой системы (30), начавшейся изнутри множества Ω_c . Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и величина a^ выбрана как точная верхняя грань тех a , при которых ЛМН (42) совместно. Тогда если константа c выбрана таким образом, что выполняется условие (45), то множество Ω_c является областью асимптотической устойчивости системы (2), замкнутой управлением (13).*

Способ нахождения константы c , обеспечивающей выполнение (45), приведен в [1].

5. Пример построения области притяжения

Рассмотрим пример, отвечающий значению $\beta = 3$. Параметры закона управления (13) выбраны удовлетворяющими условиям теоремы 1 и равными $\lambda = 0,578$, $k = 0$ и $s = 1,5$. Этот пример интересен тем, что при выбранных значениях параметров β и λ не удовлетворяется условие (28) и, следовательно, рассматриваемая механическая система не может быть стабилизирована управлением (12) ни при каком значении параметра k . Однако система может быть стабилизирована управлением (13) при $s > 1$ и $k = 0$. Проверка разрешимости ЛМН (42) при максимально возможном значении параметра a^* дает следующие параметры функции Ляпунова:

$$P = \begin{bmatrix} 0,068 & -0,040 & 0,037 & 0,167 \\ -0,040 & 0,128 & -0,070 & -0,247 \\ 0,037 & -0,070 & 0,070 & 0,175 \\ 0,167 & -0,247 & 0,175 & 0,734 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0,000017,$$

достигнутые при $a^* = 0,349$.

С использованием результата теоремы 2 инвариантная область притяжения замкнутой системы строится таким же образом, как это было описано в [1]. Опуская детали, приведем полученное значение: $c = 0,0036466$. Для проверки разрешимости ЛМН был использован пакет Scilab [15].

На рис. 4 приведены траектории замкнутой системы в координатах θ (ось абсцисс) и δ (ось ординат). В качестве управления применен комбинированный закон. Если состояние системы не попадает в область притяжения Ω_c ,

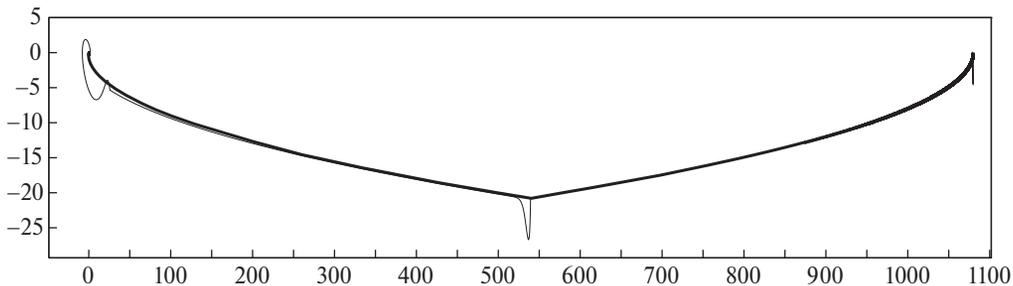


Рис. 4. Траектории замкнутой системы в координатах θ (ось абсцисс) и δ (ось ординат).

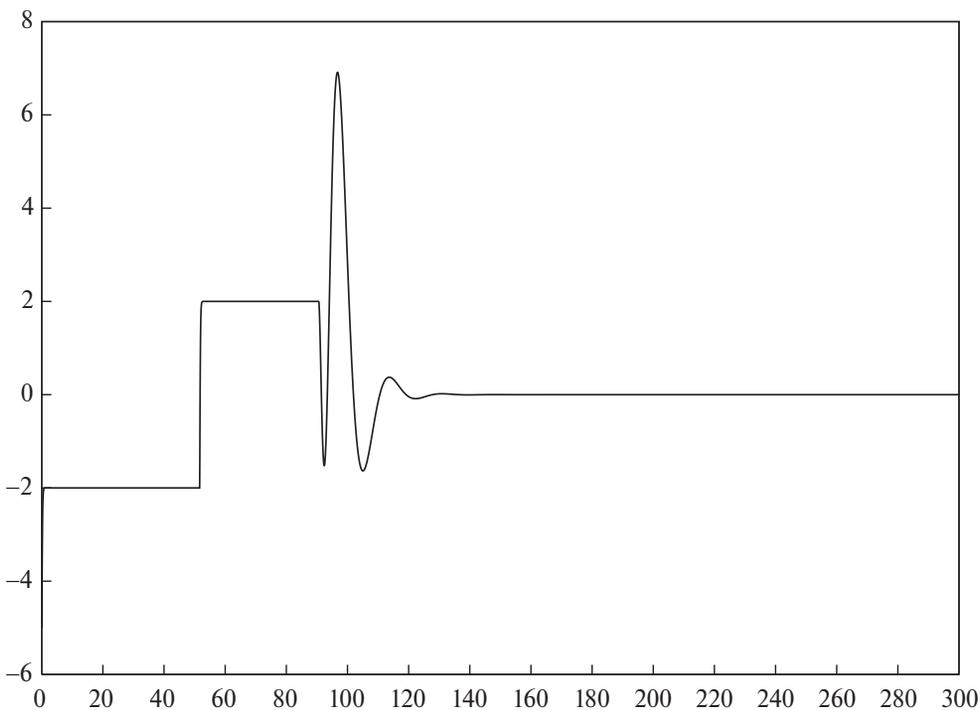


Рис. 5. График изменения переменной φ .

то применяется управление, описанное в [1, раздел 5]. Критерием пересечения границы области Ω_c является выполнение условия $V(\zeta^*) = c$. После попадания в область Ω_c происходит переключение на закон управления (13). Угловые переменные на рисунках показаны в градусах. Угловая скорость показана в градусах на безразмерную единицу времени τ . Тонкой линией изображена траектория системы (2) замкнутой комбинированным законом управления при величине $\bar{\varphi} = 2^\circ$ (см. (5.2) из [1]) и начальных условиях $\varphi(0) = -5^\circ$, $\omega(0) = 0$, $\theta(0) = 1080^\circ$, $\delta(0) = 0$. Жирной линией изображена оптимальная траектория системы (5.5) при управлении (5.6) работы [1].

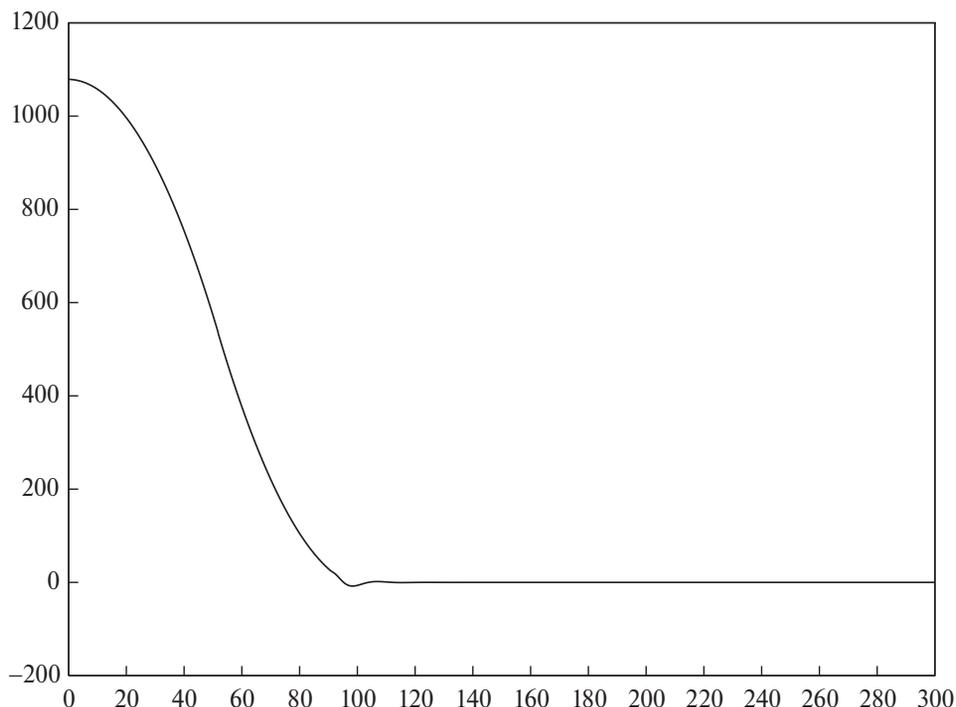


Рис. 6. График изменения переменной θ .

Графики углов φ и θ приведены на рис. 5 и 6, где по оси абсцисс отложено время в безразмерных единицах τ . Из рис. 5 видно, что на начальном этапе, когда реализуется закон управления (5.2) работы [1] значение переменной φ стабилизируется на значении сначала -2° , затем 2° , и в момент времени примерно $\tau \sim 90$ происходит переключение на закон управления (13), после чего происходит асимптотическая стабилизация нулевого положения равновесия.

6. Заключение

В работе рассмотрена задача стабилизации вертикального положения перевернутого маятника, закрепленного на колесе. Предложено двухпараметрическое расширение закона управления, стабилизирующего одновременно угол отклонения маятника от вертикали и угол поворота колеса. Задача стабилизации решается методом линеаризации обратной связью по выходу, в качестве которого берется сумма углов поворота колеса и отклонения маятника. В отличие от ранее опубликованной работы [1] наряду с добавлением диссипативного слагаемого предлагается ввести дополнительный множитель. На численном примере показано, что использование нового закона управления позволяет стабилизировать систему в случае, когда система не может быть стабилизирована предложенным ранее законом управления. Дается оценка

области притяжения нулевого положения равновесия, построение которой сводится к задаче о разрешимости системы линейных матричных неравенств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. При $k = 0$ условие (17) принимает вид $s > 0$, а условие (20) принимает вид

$$4\lambda^2 s^2 \beta (s - 1) > 0,$$

что совместно с первым неравенством и положительностью β дает $s > 1$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Из определения (18) величины \bar{s} и $\beta > 0$ непосредственно видно, что $\bar{s} < 1$. Несложные алгебраические преобразования, сделанные с помощью пакета [13], дают

$$\bar{s} - s_0 = \frac{\lambda^2 \beta^2 + 8\lambda^2 \beta + 8\lambda^2 + \beta}{(\beta + 4)(1 + 2\lambda^2)(\lambda^2 \beta + \beta + 2)},$$

откуда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что линии $k = 2\lambda s$ и $k = -2\lambda s \frac{\beta}{\beta+4}$, определяющие границу области определения неравенства (17), не пересекаются с границей (возможно не односвязной) области, определяемой (19). Действительно, подстановка $k = 2\lambda s$ в левую часть неравенства (19) приводит к противоречию

$$-8\lambda^4 s^3 (\beta + 2) > 0.$$

Аналогично к противоречию приводит подстановка в (19) равенства $k = -2\lambda s \frac{\beta}{\beta+4}$:

$$-\frac{8\beta\lambda^2 s^2 (\beta + 2)}{(\beta + 4)^2} > 0.$$

Таким образом, граница области Ω образована точками s, k , удовлетворяющими условию (18) и обращающими левую часть неравенства (19) в ноль. Из леммы 2 следует, что для этих значений s коэффициент c_0 в (22) принимает отрицательные значения, т.е. график зависимости левой части (20) от переменной k представляет собой перевернутую параболу. Тогда отрезок значений k , при которых выполняется неравенство (20), имеет вид (27) при выполнении условия положительности детерминанта квадратичного неравенства (20).

При $s = 1$ имеем $c_2 = 0$, и неравенство (20) принимает вид

$$-k^2[2 + 2\lambda^2(\beta + 4)] + k(4\lambda - 4\lambda^3\beta) > 0,$$

откуда следует неравенство (28). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рапопорт Л.Б., Генералов А.А.* Управление перевернутым маятником на колесе // А и Т. 2022. № 8. С. 3–28.
Rapoport L.B., Generalov A.A. Control of an Inverted Pendulum on a Wheel // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. P. 1151–1171.
2. *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* Управляемый маятник на подвижном основании // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9–23.
3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012.
4. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. Москва-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
5. *Utkin V.I., Guldner J., Shi J.* Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC Press, 2009.
6. *Ha J.-S., Lee J.-J.* Position Control of Mobile Two Wheeled Inverted Pendulum Robot by Sliding Mode Control // Proceedings of 12th International Conference on Control, Automation and Systems. 2012. P. 715–719.
7. *Li Z., Yang C., Fan L.* Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems. Springer, 2013.
8. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Стабилизация тележки с перевернутым маятником // А и Т. 2022. № 1. С. 95–112.
9. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
10. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Известия РАН. ТИСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
11. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum. Control strategy and experimental verification // Automatica. 2009. V. 45. P. 265–269.
12. *Ткачев С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных // Наука и образование. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 11. С. 1–29.
13. <https://wxMaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
14. *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. Ч.1. 2-е изд., М.: Высш. шк., 1986.
15. <https://www.scilab.org/>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 27.11.2023

После доработки 11.02.2024

Принята к публикации 04.03.2024